

ДЕТОНАЦИЯ НА ВРЕМЕНИПОДОБНОМ ФРОНТЕ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СИСТЕМ

Л. П. Чернаи

В столкновениях тяжелых ионов высоких энергий, в ранней Вселенной и в других релятивистских системах могут происходить фазовые переходы на трехмерной гиперповерхности, точки которой причинно не связаны. Показано, что предложенный Таубом вывод уравнения релятивистской ударной (или детонационной) адиабаты может быть обобщен для поверхностей разрыва, имеющих времениподобный вектор нормали; при этом его вид оказывается универсальным как для пространственноподобных, так и для времениподобных разрывов. Рассмотрен физический пример имплозии, индуцированной радиационным теплообменом, в котором осуществляется переход от пространственноподобного ко времениподобному фронту.

Релятивистская гидродинамическая теория ударных волн [1] нашла изящные приложения в космологии [2—5] и в реакциях с релятивистскими тяжелыми ионами [6—10]. Обычно ударная волна возникает, когда происходит быстрое сжатие вещества под действием внешней силы. Похожие разрывы могут также возникнуть самопроизвольно в расширяющейся системе, если происходит фазовый переход первого рода¹⁾. Во всех этих случаях ударные волны распространяются со скоростью, меньшей скорости света. Поэтому мировые линии точек поверхности фронта ударной волны образуют пространственноподобную гиперповерхность в пространстве Минковского (рис. 1, а), т. е. гиперповерхность с пространственноподобным вектором нормали. Законы сохранения на этой поверхности приводят к уравнению Рэнкина — Гюгонно — Тауба [1], которое связывает характеристики жидкости (давление, скорость жидкости, плотности сохраняющихся зарядов) по обе стороны разрыва.

Недавно было замечено [11], что при определенных условиях в системе может произойти быстрый фазовый переход, приводящий ко времениподобной поверхности разрыва. Такая ситуация возникает, когда система испытывает быстрое и однородное разрежение и образуется множество пузырьков в различных пространственных точках, которые причинно не связаны друг с другом. Примером этого может служить модель раздувающейся Вселенной. В этом случае пространственноподобная фазовая граница после сглаживания становится времениподобной поверхностью Σ (см. рис. 1, б). Толщина τ этой переходной зоны будет определяться скоростями образования и роста пузырей. Если τ достаточно мало по сравнению с характерной временной шкалой рассматриваемого процесса, то можно считать, что имеет место фазовый переход через бесструктурную времениподобную поверхность. Цель данной работы состоит в том, чтобы дать общий вывод уравнения Рэнкина — Гюгонно — Тауба, применимый как для пространственноподобных, так и для времениподобных поверхностей разрыва. Полученный результат будет проиллюстрирован на простом примере.

¹⁾ Такие разрывы могут появиться в процессе конденсации вещества в волне разрежения [8] или при дефлаграции и детонации расширяющихся пузырьков в переохлажденной метастабильной среде [3, 9]. Здесь мы называем любую поверхность разрыва ударным фронтом. Различие между этими разрывами и обычными ударными волнами обсуждается ниже.

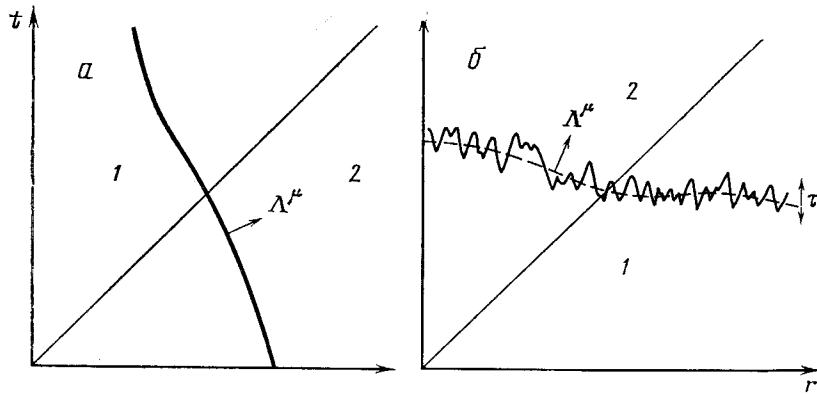


Рис. 1. Сравнение пространственноподобной (а) и времениподобной (б) поверхностей разрыва, характеризуемых вектором нормали Λ^μ (1 и 2 — фазы вещества до и после разрыва, тонкая прямая — образующая светового конуса). Времениподобный разрыв может возникнуть при спонтанном образовании и росте пузырей, которые объединяются через время τ (сплошная кривая). Если сгладить эту сложную поверхность, то получится времениподобный фронт (штриховая кривая). Заметим, что в вязкой жидкости пространственноподобные разрывы также имеют конечную ширину. Таким образом, подструктура времениподобного фронта (б) может развиваться только если расстояние между пузырями больше ширины пространственноподобных разрывов

Обозначим вектор нормали к поверхности Σ через Λ^μ . Он нормирован так, что

$$\Lambda_\mu \Lambda^\mu = \begin{cases} +1 & \text{для времениподобной } \Sigma, \\ -1 & \text{для пространственноподобной } \Sigma. \end{cases} \quad (1)$$

Состояние системы характеризуется тензором энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = w u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad (2)$$

где введена плотность энтальпии $w = e + p$ — сумма плотности энергии e и давления p ; $u^\mu = (\gamma, \gamma v)$ — 4-скорость жидкости, нормированная так, что $u^\mu u_\mu = 1$; $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ — метрический тензор. Если имеется поверхность разрыва, то индекс 1 будет отмечать динамические характеристики жидкости, например Q , по одну сторону разрыва (Q_1), а индекс 2 — по другую (Q_2). Тогда скачок Q на разрыве будет записываться как

$$[Q] = Q_2 - Q_1. \quad (3)$$

В этих обозначениях законы сохранения на поверхности разрыва имеют вид

$$[R^\mu] = [T^{\mu\nu} \Lambda_\nu] = 0 \quad (4)$$

(сохранение энергии и импульса),

$$[j] = [n^\mu \Lambda_\mu] = 0 \quad (5)$$

(сохранение числа частиц). Системы, в которых число частиц не сохраняется, рассмотрены в Приложении 1. Выражение (5) можно записать для любого независимого сохраняющегося заряда с соответствующим 4-током этого заряда. В предположении, что поток связан с сохраняющимся зарядом, можно ввести инвариантную скалярную плотность $n = n^\mu u_\mu$, а также величину $x = w/n^2$ [2, 3, 6], которая играет роль удельного объема V в нерелятивистской теории. Фактически в нерелятивистском пределе $x = mV$ (m — масса частицы).

Чтобы вывести уравнение детонационной адиабаты, связывающее только термодинамические величины, требуется исключить 4-скорость из

уравнений (4) и (5). Так как уравнение (4) является векторным, его можно разложить на два независимых уравнения. Для этого нужно взять его проекцию на направление нормали к поверхности Σ :

$$[R^\mu]\Lambda_\mu=0, \quad (6)$$

а также спроектировать его на саму поверхность с помощью проекционного оператора $P^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}-\Lambda^\mu\Lambda^\nu/\Lambda^\alpha\Lambda_\alpha$:

$$[G^\mu]=[P^{\mu\nu}R_\nu]=0. \quad (7)$$

Из уравнения (7) можно получить скалярное уравнение, показывающее, что длина вектора G^μ сохраняется:

$$[G^\mu G_\mu]=0, \quad (8)$$

а также уравнение, обеспечивающее неизменность направления проекции вектора G^μ :

$$[G^\mu/[G^\mu]]=0.$$

После преобразований из уравнений (5) и (6) можно получить следующее выражение для потока:

$$j^2=[p]\Lambda^\mu\Lambda_\mu/[x]. \quad (9)$$

Из уравнений (5) и (8) находим

$$j^2=[wx]/[x^2]\Lambda_\mu\Lambda^\mu. \quad (10)$$

Из этих двух соотношений немедленно получается хорошо известное уравнение адиабаты Тауба:

$$[p](x_1+x_2)=[wx]. \quad (11)$$

Для известных p_1 и x_1 и при заданном уравнении состояния уравнение (11) определяет связь между p_2 и x_2 . Заметим, что вектор нормали Λ^μ к поверхности разрыва входит в это уравнение только в комбинации $(\Lambda^\mu\Lambda_\mu)^2$, которая равна единице. Следовательно, уравнение адиабаты Тауба имеет один и тот же вид как для пространственноподобной, так и для времениподобной поверхностей разрыва. Однако между этими двумя случаями имеется существенное различие.

Это демонстрирует рис. 2, где показаны ударная и детонационная адиабаты на плоскости (p, x) . Начальное состояние отмечено точкой 1, а конечное — точкой 2. В случае обычной ударной волны адиабата, определяемая уравнением (11), проходит через точку 1, так как конечное состояние вещества описывается тем же уравнением состояния, что и начальное. Если в конечном состоянии из-за химической реакции или фазового перехода происходит изменение уравнения состояния, то точка 2 лежит на кривой, которая не проходит через начальную точку 1. Обычно эта кривая называется детонационной адиабатой. На рис. 2 показана детонационная адиабата для экзотермического процесса. Если процесс эндотермический, то соответствующая кривая пройдет ниже точки 1. Отрезок OA на этой кривой соответствует детонации, а отрезок $O'A'$ — медленному горению (дефлаграции). Заштрихованная часть плоскости, где $[p]/[x]<0$, раньше считалась нефизической [9, 3] на основании нерелятивистских аналогий [12]. Согласно [9], в этой области поток j становится мнимым для пространственноподобной поверхности разрыва, когда $\Lambda_\mu\Lambda^\mu=-1$. Однако эта область может быть достигнута при действительном значении потока j в случае времениподобной поверхности детонационного фронта. Заметим, что существование ударного фронта с времениподобной нормалью невозможно, так как ударная адиабата не может лежать во времениподобной области (заштрихованная область на рис. 2). Это легко уви-

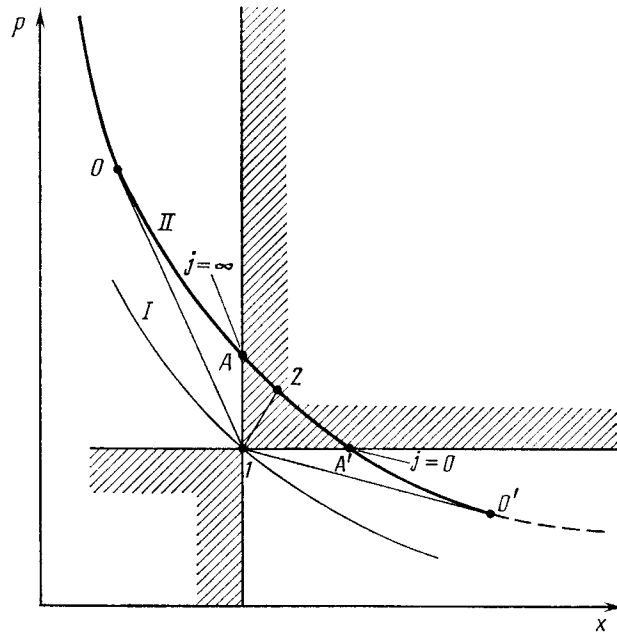


Рис. 2. Ударная (I) и детонационная (II) адиабаты на плоскости (p, x) , p — давление, $x=w/n^2$ — обобщенный удельный объем. I — начальная точка; конечное состояние Z должно лежать на адиабате. Наклон прямой, соединяющей начальную и конечную точки, определяется током через поверхность разрыва $j^2=\pm[p]/[x]$ соответственно для пространственноподобного (+) и времениподобного (-) разрывам; Участок AA' детонационной адиабаты соответствует времениподобным разрывам; O и O' — точки Чепмена — Жуге на детонационной адиабате [2]. Быстрое горение и конденсация (участок OA) при наличии усиления за счет граничных условий могут плавно перейти через точку A во времениподобную детонацию

деть, если вспомнить, что с помощью преобразования Лоренца можно перейти в систему, в которой вектор нормали ко времениподобной поверхности имеет вид $\Lambda^\mu=(1, 0, 0, 0)$. В этой системе имеется резкое изменение p и x , но плотность $N=n\gamma$, измеренная в этой системе, остается неизменной, так как $[j]=[n\gamma]=[N]=0$. Это возможно только в том случае, когда в системе происходит фазовый переход или химическая реакция, т. е. имеет место детонация.

Однако спонтанная детонация может возникнуть, только если удовлетворяется условие возрастания энтропии. Так как в точке I адиабата Пуассона параллельна ударной адиабате, состояния с более высокой энтропией лежат выше точки I . Таким образом, только верхняя четверть времениподобной области детонации может быть достигнута в физическом процессе. Другими словами, на времениподобном фронте может происходить лишь экзотермическая детонация. В том случае, когда для экзотермического процесса существует порог (по давлению или температуре), физически реализуемый участок времениподобной детонационной адиабаты должен начинаться в некоторой точке внутри отрезка AA' .

В Приложении 2 описана простая схематическая модель, которая демонстрирует непрерывный переход от пространственноподобной ко времениподобной детонации в процессе имплозии, индуцированной излучением. Пусть сферическое ядро единичного радиуса ($R=1, c=1$) окружено быстро воспламеняющейся оболочкой. Если при $t=0$ поджечь эту оболочку со всех сторон, то часть выделяющейся энергии будет излучаться внутрь и разогревать ядро. В пренебрежении непрозрачностью и сжатием ядра можно легко рассчитать линии контуров постоянной температуры:

$$T(r, t) \infty \begin{cases} 0, & t < 1-r, \\ \frac{t}{r} \left(\ln \frac{t}{1-r} - 1 \right) + \\ + \frac{1-r}{t}, & 1-r < t < 1+r, \\ \frac{t}{r} \ln \frac{1+r}{1-r} - 2, & 1+r > t. \end{cases}$$

Пусть в ядре происходит экзотермический переход, если температура достигает критического значения T_c . Тогда этот переход имеет место на поверхности $T(r, t) = T_c$. Если разогрев ядра до температуры T_c происходит быстро ($t \approx 2,5$), то значительная часть этой поверхности ($r \lesssim 0,5$; $2,3 \lesssim t \lesssim 2,5$) соответствует времениподобной детонации (рис. 3). Если разогрев оказывается более медленным, то времениподобная область детонации концентрируется в меньшей центральной зоне.

Суммируя сказанное, следует подчеркнуть, что общее рассмотрение произвольного разрыва в релятивистской жидкости позволило распространить уравнение Рэнкина — Гюгонно — Тауба на новую область, которая не рассматривалась ранее. Более того, на основании нерелятивистских аналогий эта область считалась нефизической. Включение в рассмотрение времениподобной детонации замыкает релятивистскую теорию быстрого горения и конденсации. Развитый формализм позволяет лучше понять концептуальное единство проблем релятивистской гидродинамики и сделать более прозрачным их математическое описание. Это иллюстрируется конкретным примером на рис. 3.

Автор благодарит Т. Матсуи и И. Мишустина за ценные замечания. Он также очень признателен Дж. Чаплину, М. Дьюлаши и Дж. Капусте за плодотворные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Фронты детонации и дефлаграции для КХД-плазмы и адронной материи с нулевым барионным зарядом

Обозначения:

$$\begin{aligned} u^\mu &= (\gamma, \gamma \mathbf{v}), & u_\mu &= (\gamma, -\gamma \mathbf{v}), \\ u^\mu u_\mu &= +1, & g^{\mu\nu} &= \text{diag}(1, -1, -1, -1). \end{aligned}$$

Вектор нормали к поверхности разрыва Λ^μ нормирован таким образом, что $\Lambda^\mu \Lambda_\mu = \pm 1$ для времениподобной (+) и пространственноподобной (−) поверхностей разрыва. В локальной системе покоя $\Lambda^\mu = (1, 0, 0, 0)$ для времениподобного и $\Lambda^\mu = (0, \hat{e})$ для пространственноподобного разрыва.

1. Проекция, параллельная Λ^μ :

$$[T^{\mu\nu} \Lambda_\mu \Lambda_\nu] = [w(u^\mu \Lambda_\mu)^2 - p \Lambda_\mu \Lambda^\mu] = 0. \quad (\text{П.1})$$

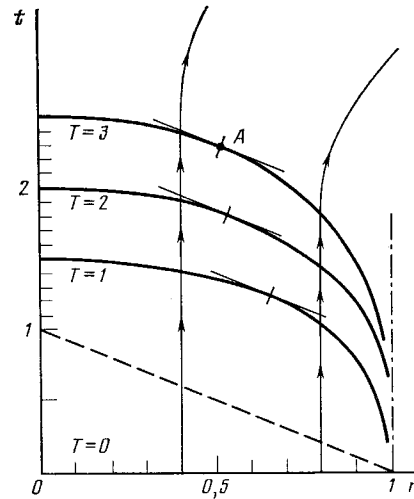


Рис. 3. Ускорение разрыва за счет излучения может привести к плавному переходу от пространственноподобного ко времениподобному фронту в точке А, где фронт распространяется со световой скоростью. Это оказывается возможным потому, что жидкость не движется вместе с фронтом. Мировые линии частиц жидкости (линии со стрелками) остаются пространственноподобными, т. е. их скорость меньше c . Штриховая линия — световой конус, t измеряется в единицах R/c , r — в единицах R , а T — в единицах $2\pi CQ/c_V$.

2. Проекция, перпендикулярная Λ^μ . Введем

$$G_\tau = T^{\mu\nu} \Lambda_\nu \Delta_{\tau\mu}, \quad \Delta^{\tau\mu} = g^{\tau\mu} - \Lambda^\tau \Lambda^\mu / \Lambda^\sigma \Lambda_\sigma$$

(G_τ ортогонален Λ_τ);

$$\begin{aligned} G^\mu &= \{ w u_\tau (u_\nu \Lambda^\nu) - p \Lambda_\tau \} \{ g^{\tau\mu} - \Lambda^\tau \Lambda^\mu / \Lambda^\sigma \Lambda_\sigma \} = \\ &= w (u^\tau \Lambda_\tau) u^\mu - w (u_\nu \Lambda^\nu)^2 \Lambda^\mu / \Lambda^\sigma \Lambda_\sigma. \end{aligned}$$

Из условия $[G^\mu] = 0$ следует также, что $[G^\mu G_\mu] = 0$. Это приводит к следующему выражению:

$$[w^2 (u_\nu \Lambda^\nu)^2 - w^2 (u_\nu \Lambda^\nu)^4 / \Lambda^\sigma \Lambda_\sigma] = 0. \quad (\text{П.2})$$

Введем обозначения $Q = w (u_\nu \Lambda^\nu)^2$ и $N = \Lambda^\nu \Lambda_\nu$. Тогда уравнения (П.1) и (П.2) можно переписать в виде

$$[Q] = N[p], \quad [Q^2] = N[wp].$$

Исключая N , имеем

$$[p] (Q_2 + Q_1) = [wQ], \quad (\text{П.3})$$

$$Q_1 = -N(p_2 - p_1)(e_2 + p_1) / (e_2 - p_2 - e_1 + p_1).$$

Следовательно,

$$(u^\mu \Lambda_\mu)_1^2 = N(p_2 - p_1)(e_2 + p_1) / (e_2 - p_2 - e_1 + p_1)(e_1 + p_1). \quad (\text{П.4})$$

С другой стороны,

$$(u^\mu \Lambda_\mu)_1^2 = \begin{cases} \gamma_1^2 v_1^2 \cos^2 \theta_1, & \text{пространственноподобный разрыв,} \\ \gamma_1^2, & \text{временноподобный разрыв.} \end{cases} \quad (\text{П.5})$$

В работе [9] рассматривались пространственноподобные разрывы только с $\theta_1 = 0$. Из (П.4), (П.5) получаем выражение для скорости налетающего потока в системе покоя фронта (при $\theta_1 = \theta_2 = 0$):

$$v_1^2 = (p_1 - p_2)(e_2 + p_1) / (e_1 - e_2)(e_1 + p_2). \quad (\text{П.6})$$

Скорость v_1' в случае временноподобной детонации равна

$$v_1'^2 = v_1^{-2}.$$

Относительная скорость втекающего и вытекающего потоков как для случая пространственноподобного, так и для случая временноподобного фронтов есть

$$v_{12}^2 = v_{12}'^2 = (p_1 - p_2)(e_1 - e_2) / (e_1 + p_2)(e_2 + p_1). \quad (\text{П.7})$$

Если поток энтропии обозначить как $S^\mu = s u^\mu$, то условие возрастания энтропии можно записать как

$$[S^\mu \Lambda_\mu] \geq 0 \quad \text{или} \quad s_2/s_1 \geq (T_2/T_1)(e_2 + p_1) / (e_1 + p_2) \quad (\text{П.8})$$

для обоих случаев детонации в процессе $1 \rightarrow 2$. Если в уравнения (П.6) — (П.8) подставить то же уравнение состояния и провести такой же анализ, что и в работе [9], то можно найти область, где возможна временноподобная детонация (см. рис. 4).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

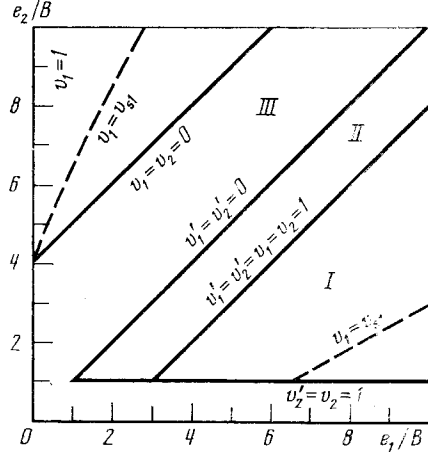
Имплозия, инициированная излучением

Рассмотрим физический объем, заполненный веществом, достаточно прозрачным для излучения. Это вещество испытывает экзотермический переход, если его температура превышает T_c . Предположим, что ядро окружено оболочкой из быстро воспламеняющегося взрывчатого вещества,

излучение которого приводит к разогреву ядра. Пренебрежем расширением оболочки внутрь, а также расширением ядра, т. е. будем считать его радиус неизменным, $R = \text{const}$. Пусть оболочка подожжена в момент $t_0 = 0$ синхронизованным образом во всех точках. Ниже длина измеряется в единицах R , а время t — в единицах R/c .

Пусть Q — теплота, которую оболочка излучает в единицу времени через единицу поверхности. Если предположить, что в веществе ядра погло-

Рис. 4. Кипематические области, в которых уравнения непрерывности удовлетворяются при физических значениях скорости потока для перехода между кварковой материей с плотностью энергии e_2 и адронной матрицей с плотностью энергии e_1 (B — константа в модели кварковых мешков). I — область пространственно-подобной детонации, II — область времениподобной детонации, III — нефизическая область. Из-за возможности времениподобной детонации нефизическая область здесь меньше полученной в работе [9, рис. 4]



щается постоянная доля C этого тепла, то на расстоянии r от центра ядра имеем (пренебрегаем непрозрачностью ядра)

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= CQ \int_0^t d\tau \cdot 2\pi \int_1^v d \cos \theta (1+r^2-2r \cos \theta)^{-1} \delta[\tau - (1+r^2-2r \cos \theta)^{1/2}] = \\ &= C \cdot 2\pi Q r^{-1} \int_{1-r}^a \frac{d\tau}{\tau} = \frac{2\pi CQ}{r} \ln \tau \Big|_{1-r}^a, \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

где

$$a = \begin{cases} 1-r, & t \leq 1-r, \\ t, & 1-r < t < 1+r, \\ 1+r, & t > 1+r. \end{cases}$$

Таким образом, теплота, поглощаемая в единицу времени, равна

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi CQ}{r} \begin{cases} \ln[(1+r)/(1-r)], & t > 1+r, \\ \ln \frac{t}{1-r}, & 1-r < t < 1+r, \\ 0, & t < 1-r. \end{cases} \quad (\text{П.10})$$

Пренебрегая сжатием, считая теплоемкость C_v постоянной и используя, что $dT \approx dQ/C_v$, имеем

$$T(r, t) \approx \frac{1}{C_v} \int_0^t dt \frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi CQ}{C_v r} \begin{cases} t \ln \frac{1+r}{1-r} - 2r, & t > 1+r, \\ t \left(\ln \frac{t}{1-r} - 1 \right) - 1-r, & 1-r < t < 1+r, \\ 0, & t < 1-r. \end{cases} \quad (\text{П.11})$$

(таким образом, если $t > 1+r$, то $T(r=0, t) \propto t-1$). Поверхность разрыва определяется линией контура $T(r, t) = T_c$. Касательная к этой линии при $t > 1+r$ дается выражением

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_{r_c} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{r_c} / \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r_c} = \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) / t \left(\frac{2}{1-r} - \frac{1}{r} \ln \frac{1+r}{1-r}\right). \quad (\text{П.12})$$

Точка (t_c, r_c) , в которой сходятся пространственноподобная и времениподобная части поверхности, определяется условием $(\partial r/\partial t)_{r_c} = 1$, откуда следует

$$t_c = \left\{ \left[(1-r_c) \ln \left(\frac{1+r_c}{1-r_c} \right) \right]^{-1} - \frac{1}{r_c} \right\}^{-1}.$$

Например, для $r_c = 0,5$ имеем $t_c = 2,34$ и $T_c = 3,142 (2\pi CQ/C_V)$. Центр ядра нагревается до T_c за время $t = 2,57$. Линия $t = t_c(r)$ разделяет пространственноподобную и времениподобную части поверхности разрыва $T(r, t) = T_c$. Разрыв образуется при $r = R$ в момент времени $t = 0$ и затем распространяется внутрь. Этот процесс сначала идет медленно, но затем из-за радиационного теплообмена он ускоряется и при $r_c = t_c^{-1}(t_c(r))$ плавно переходит во времениподобный разрыв (см. рис. 3). Если $T_c = 4\pi CQ/C_V$, то это происходит приблизительно при $r_c = 0,5 - 0,6$. Похожий постепенный переход от пространственноподобной ко времениподобной детонации может реализоваться на поздних стадиях ультрарелятивистских ядерных столкновений. Если включить радиационный теплообмен в сценарий, описанный в работе [11], то переход от пространственноподобной ко времениподобной дефлаграции будет плавным. Однако этот вопрос требует более детального численного анализа.

Литература

1. Taub A. H. Phys. Rev., 1948, **74**, 328.
2. Thorne K. S. Astrophys. J., 1973, **179**, 897.
3. Stainhardt P. J. Phys. Rev., 1982, **D25**, 2074.
4. Johnson M. H., McKee C. F. Phys. Rev., 1971, **D3**, 858.
5. Lasher G. Phys. Rev. Lett., 1979, **42**, 1646. Guth A. H., Weinberg E. J. Phys. Rev., 1981, **D23**, 876.
6. Shuryak E. V. Phys. Rep., 1980, **61**, 71.
7. Van Hove C. Z. Phys., 1983, **C21**, 93.
8. Friman B. L., Baym G., Blaizot J.-P. Phys. Lett., 1983, **132B**, 291.
9. Gyulassy M., Kajantie K., Kurki-Suonio H., McLerran L. Nucl. Phys., 1984, **B237**, 477.
10. Csernai L. P. Phys. Rev., 1984, **D29**, 1945.
11. Glendenning N. K., Matsui T. Phys. Lett., 1984, **141B**, 419.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1956.

Школа физики и астрономии
Миннесотского университета,
Миннеаполис, Миннесота 55455, США

Поступила в редакцию
20.VI.1986

DETONATION ACROSS A TIMELIKE SURFACE FOR RELATIVISTIC SYSTEMS

L. P. Csernai

Phase transitions in high energy heavy ion collisions, in the early Universe and in other relativistic systems, may occur on a 3-dimensional hypersurface the points of which are not causally connected. It is shown that Taub's original derivation of the relativistic shock (or detonation) adiabat can be generalized in discontinuities across surfaces having a timelike normal vector, and it can be cast in a form universal for both spacelike and timelike discontinuities. An example is outlined of an implosion - explosion where the front switches from spacelike to timelike due to radiative heat transfer.

Detonation on a timelike front for relativistic systems

L. P. Csernai

School of Physics and Astronomy, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota 55455, USA

(Submitted 20 June 1986)

Zh. Eksp. Teor. Fiz. **92**, 379–386 (February 1987)

In collisions of high-energy heavy ions, in the early universe, and in other relativistic systems, phase transitions can take place on a three-dimensional hypersurface whose points are not causally connected. It is shown that the derivation of the equation for the relativistic shock (or detonation) adiabat proposed by Taub can be generalized for discontinuity surfaces having a timelike normal vector; the form of the equation is universal, i.e., the same for spacelike and timelike discontinuities. In the considered physical example of implosion induced by radiative heat transfer there is a transition from a spacelike to a timelike front.

The relativistic hydrodynamic theory of shock waves¹ has found elegant applications in cosmology²⁻⁵ and in reactions with relativistic heavy ions.⁶⁻¹⁰ A shock wave usually occurs when there is rapid compression of matter under the influence of an external force. Similar discontinuities can also arise spontaneously in an expanding system if a first-order phase transition occurs.¹¹ In all these cases, shock waves propagate with a velocity less than the velocity of light. Therefore, the world lines of the points of the surface of the shock front form a spacelike hypersurface in Minkowski space (Fig. 1a), i.e., a hypersurface with a spacelike normal vector. The conservation laws on this surface lead to the Rankine-Hugoniot-Taub equation,¹ which relates the properties of the fluid (pressure, fluid velocity, densities of the conserved charges) on the two sides of the discontinuity.

It was noted recently¹¹ that under certain conditions there may occur in a system a rapid phase transition leading to a timelike discontinuity surface. Such a situation occurs when the system undergoes a rapid and homogeneous rarefaction and there forms a set of bubbles at different spatial points causally unconnected to each other. As an example of this we can mention the inflationary universe model. In this case, the spacelike phase boundary becomes after smoothing a timelike surface Σ (see Fig. 1b). The thickness τ of this transition region will be determined by the rates of formation and growth of the bubbles. If τ is sufficiently small compared with the characteristic time scale of the considered process, then it can be assumed that the phase transition takes place through a structureless timelike surface. The aim of the present paper is to give a general derivation of the Rankine-Hugoniot-Taub equation valid for both spacelike and timelike surfaces. The obtained result will be illustrated by a simple example.

We denote the vector of the normal to the surface Σ by Λ^μ . It is normalized as follows:

$$\Lambda_\mu \Lambda^\mu = \begin{cases} +1 & \text{for timelike } \Sigma, \\ -1 & \text{for spacelike } \Sigma. \end{cases} \quad (1)$$

The state of the system is characterized by the energy-momentum tensor

$$T^{\mu\nu} = w u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad (2)$$

where we have introduced the enthalpy density $w = e + p$, the sum of the energy density e and the pressure p ; $u^\mu = (\gamma, \gamma\mathbf{v})$ is the 4-velocity of the fluid, normalized such that $u^\mu u_\mu = 1$; and $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ is the met-

ric tensor. If there is a discontinuity surface, the index 1 will identify the dynamical characteristics of the fluid, for example, Q , on one side of the discontinuity (Q_1), and the index 2 those on the other side (Q_2). Then the jump of Q across the discontinuity will be expressed as

$$[Q] = Q_2 - Q_1. \quad (3)$$

In this notation, the conservation laws across the discontinuity surface have the form

$$[R^\mu] = [T^{\mu\nu} \Lambda_\nu] = 0 \quad (4)$$

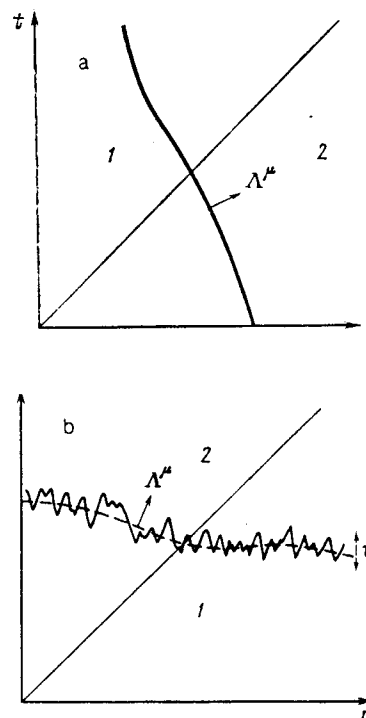


FIG. 1. Comparison of spacelike (a) and timelike (b) discontinuity surfaces characterized by normal vector Λ^μ (1 and 2 are the phases of the matter before and after the discontinuity, and the thin straight line is the generator of the light cone). A timelike discontinuity can occur in the case of the spontaneous production and growth of bubbles, which are united after a time τ (continuous curve). If this complicated surface is smoothed, then a timelike front (broken curve) is obtained. Note that in a viscous fluid spacelike discontinuities also have finite width. Thus, the substructure of the timelike front (b) can develop only if the distance between the bubbles is greater than the width of the spacelike discontinuities.

(conservation of the energy and momentum), and

$$[j] = [n^\alpha \Lambda_\alpha] = 0 \quad (5)$$

(conservation of the particle number). Systems in which the particle number is not conserved are considered in Appendix 1. The expression (5) can be written down for any independent conserved charge with corresponding 4-current of this charge. Under the assumption that the flux is related to the conserved charge, we can introduce an invariant scalar density $n = n^\alpha u_\alpha$, and also the quantity $x = w/n^2$,^{2,3,6} which plays the part of the specific volume V in nonrelativistic theory. In fact, in the nonrelativistic limit $x = mV$ (m is the mass of a particle).

To derive the equation of the detonation adiabat, which relates only thermodynamic quantities, it is necessary to eliminate the 4-velocity from Eqs. (4) and (5). Since (4) is a vectorial equation, it can be decomposed into two independent equations. For this it is necessary to take its projection onto the direction of the normal to the surface Σ :

$$[R^\mu] \Lambda_\mu = 0, \quad (6)$$

and also to project it onto the surface itself by means of the projection operator $P^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \Lambda^\mu \Lambda^\nu / \Lambda^\alpha \Lambda_\alpha$:

$$[G^\mu] = [P^{\mu\nu} R_\nu] = 0. \quad (7)$$

From Eq. (7) it is possible to obtain a scalar equation which shows that the length of the vector G^μ is conserved,

$$[G^\mu G_\mu] = 0, \quad (8)$$

and also an equation that ensures an unchanging direction of the projection of the vector G^μ :

$$[G^\mu / G^\mu] = 0.$$

After manipulations, we can obtain from Eqs. (5) and (6) the following expression for the flux:

$$j^2 = [p] \Lambda^\alpha \Lambda_\alpha / [x]. \quad (9)$$

From Eqs. (5) and (8), we find

$$j^2 = [w \cdot x] / [x^2] \Lambda_\mu \Lambda^\mu. \quad (10)$$

From these two relations, we obtain directly Taub's well-known adiabat equation:

$$[p] (x_1 + x_2) = [w x]. \quad (11)$$

For known p_1 and x_1 and for known equation of state Eq. (11) determines the connection between p_2 and x_2 . Note that the vector Λ^μ of the normal to the discontinuity surface occurs in this equation only in the combination $(\Lambda^\mu \Lambda_\mu)^2$, which is equal to unity. Therefore, Taub's adiabat equation has the same form for spacelike and timelike discontinuity surfaces. However, there is an important difference between these two cases.

This is demonstrated by Fig. 2, which shows shock and detonation adiabats on the (p, x) plane. The initial state is indicated by the point 1, the final state by the point 2. In the case of an ordinary shock wave, the adiabat determined by Eq. (11) passes through the point 1, since the final state of the matter is described by the same equation of state as the initial state. If in the final state there has been a change of the equation of state due to a chemical reaction or a phase transi-

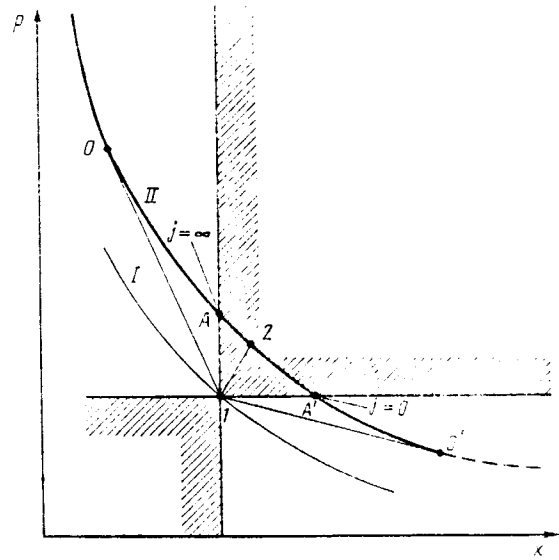


FIG. 2. Shock (I) and detonation (II) adiabats on the (p, x) plane (p is the pressure and $x = w/n^2$ is the generalized specific volume). The point 1 is the initial point; the final state 2 must lie on the adiabat. The inclination of the straight line joining the initial and final points is determined by the current through the discontinuity surface: $j^2 = \pm [p]/[x]$ for spacelike (+) and timelike (-) discontinuities, respectively. The segment AA' of the detonation adiabat corresponds to timelike discontinuities; O and O' are the Chapman-Jouguet points on the detonation adiabat. In the presence of enhancement due to boundary conditions, rapid combustion and condensation (segment OA) can pass smoothly through the point A to timelike detonation.

tion, the point 2 lies on a curve that does not pass through the initial point 1. Usually, this curve is called the detonation adiabat. Figure 2 shows the detonation adiabat for an exothermic process. If the process is endothermic, the corresponding curve passes below the point 1. The segment OA on this curve corresponds to detonation, and the segment O'A' to slow burning (deflagration). The hatched part of the plane, where $[p]/[x] < 0$, was previously assumed to be unphysical^{9,3} on the basis of nonrelativistic analogies.^{1,2} According to Ref. 9, in this region the flux j becomes imaginary for a spacelike discontinuity surface, when $\Lambda_\mu \Lambda^\mu = -1$. However, this region can be reached for a real value of the flux j in the case of a timelike surface of the detonation front. We note that the existence of a shock front with timelike normal is impossible since the shock adiabat cannot lie in the timelike region (hatched region in Fig. 2). This is readily seen by recalling that by means of a Lorentz transformation one can go over to a system in which the vector of the normal to the timelike surface has the form $\Lambda^\mu = (1, 0, 0, 0)$. In this system there is an abrupt change of p and x but the density $N = n\gamma$ measured in this system remains unchanged, since $[j] = [n\gamma] = [N] = 0$. This is possible only in the case when a phase transition or chemical reaction occurs in the system, i.e., there is detonation.

However, spontaneous detonation can occur only if the condition of increase of the entropy is satisfied. Since at the point 1 the Poisson adiabat is parallel to the shock adiabat, states with higher entropy lie above the point 1. Thus, only the upper quarter of the timelike detonation region can be reached in a physical process. In other words, only exothermic detonation can occur on a timelike front. In this case,

when the exothermic process has a threshold (with respect to the pressure or the temperature), the physically realized section of the timelike detonation adiabat must begin at a certain point within the segment AA'.

In Appendix 2 we describe a simple schematic model that demonstrates a continuous transition from spacelike to timelike detonation in an implosion process induced by radiation. Suppose a spherical core of unit radius ($R = 1, c = 1$) is surrounded by a rapidly igniting shell. If at $t = 0$ this shell is ignited from all sides, then some of the released energy will be radiated inward and heat the core. Neglecting the opacity and compression of the core, we can readily calculate the constant-temperature contours:

$$T(r, t) \propto \begin{cases} 0, & t < 1-r, \\ \frac{t}{r} \left(\ln \frac{t}{1-r} - 1 \right) + \\ + \frac{1-r}{t}, & 1-r < t < 1+r, \\ \frac{t}{r} \ln \frac{1+r}{1-r} - 2, & 1+r > t. \end{cases}$$

Suppose that in the core an exothermic transition occurs if the temperature reaches the critical value T_c . Then this transition takes place on the surface $T(r, t) = T_c$. If the heating of the core to the temperature T_c takes place rapidly ($t \approx 2.5$), then an appreciable part of this surface ($r \lesssim 0.5$, $2.3 \lesssim t \lesssim 2.5$) corresponds to timelike detonation (Fig. 3). If the heating is slower, the timelike detonation region is concentrated in a smaller central zone.

Summarizing what we have said, we must emphasize that the general treatment of an arbitrary discontinuity in a relativistic fluid has made it possible to extend the Rankine-Hugoniot-Taub equation to a new region not hitherto considered. Moreover, on the basis of nonrelativistic analogies this region has hitherto been regarded as unphysical. The inclusion in the treatment of timelike detonation closes the relativistic theory of rapid combustion and condensation.

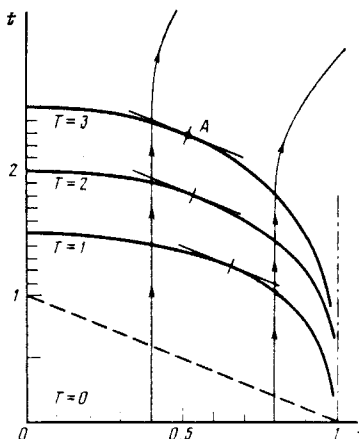


FIG. 3. Acceleration of discontinuity due to radiation can lead to a smooth transition from a spacelike to a timelike front at the point A, where the front propagates with luminal velocity. This is possible because the fluid does not move together with the front. The world lines of the fluid particles (the lines with arrows) remain spacelike, i.e., their velocity is less than c . The broken line is the light cone. t is measured in units of R/c , r in units of R , and T in units of $2\pi CQ/C_s$.

The formalism developed makes it possible to understand more clearly the conceptual unity of problems of relativistic hydrodynamics and make their mathematical description more transparent. This is illustrated by the concrete example in Fig. 3.

The author thanks T. Matsui and I. Mishustin for valuable comments. He is also very grateful to J. Chaplin, M. Gyulassy, and J. Kapusta for fruitful discussions.

APPENDIX 1. DETONATION AND DEFLAGRATION FRONTS FOR THE QCD PLASMA AND HADRONIC MATTER WITH ZERO BARYON CHARGE

Notation:

$$u^\mu = (\gamma, \gamma\mathbf{v}), \quad u_\mu = (\gamma, -\gamma\mathbf{v}), \\ w^\mu u_\mu = +1, \quad g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

The vector Λ^μ of the normal to the discontinuity surface is normalized in such a way that $\Lambda^\mu \Lambda_\mu = \pm 1$ for a timelike (+) and spacelike (-) discontinuity surface. In the local rest frame $\Lambda^\mu = (1, 0, 0, 0)$ for timelike discontinuity and $\Lambda^\mu = (0, \hat{\mathbf{n}})$ for spacelike discontinuity.

1. Projection parallel to Λ^μ :

$$[T^{\mu\nu} \Lambda_\mu \Lambda_\nu] = [w(u^\mu \Lambda_\mu)^2 - p \Lambda_\mu \Lambda^\mu] = 0. \quad (\text{A1})$$

2. Projection perpendicular to Λ^μ . We introduce

$$G_\tau = T^{\mu\nu} \Lambda_\nu \Delta_{\tau\mu}, \quad \Delta^\mu = g^{\mu\nu} - \Lambda^\nu \Lambda_\nu / \Lambda^\sigma \Lambda_\sigma$$

(G_τ is orthogonal to Λ_τ),

$$G^\mu = \{w u_\nu (u_\nu \Lambda^\nu) - p \Lambda_\nu\} \{g^{\mu\nu} - \Lambda^\nu \Lambda_\nu / \Lambda^\sigma \Lambda_\sigma\} \\ = w(u^\mu \Lambda_\nu) u^\nu - w(u_\nu \Lambda^\nu)^2 \Lambda^\mu / \Lambda^\sigma \Lambda_\sigma.$$

It also follows from the condition $[G^\mu] = 0$ that $[G^\mu G_\mu] = 0$. This leads to the expression

$$[w^2 (u_\nu \Lambda^\nu)^2 - w^2 (u_\nu \Lambda^\nu)^4 / \Lambda^\sigma \Lambda_\sigma] = 0. \quad (\text{A2})$$

We introduce the notation $Q = w(u_\nu \Lambda^\nu)^2$ and $N = \Lambda^\nu \Lambda_\nu$. Then Eqs. (A1) and (A2) can be rewritten in the form

$$[Q] = N[p], \quad [Q^2] = N[wp].$$

Eliminating N , we have

$$[p] (Q_2 + Q_1) = [wQ], \quad (\text{A3})$$

$$Q_1 = -N(p_2 - p_1)(e_2 + p_1) / (e_2 - p_2 - e_1 + p_1).$$

Therefore,

$$(u^\mu \Lambda_\mu)_1^2 = N(p_2 - p_1)(e_2 + p_1) / (e_2 - p_2 - e_1 + p_1)(e_1 + p_1). \quad (\text{A4})$$

On the other hand,

$$(u^\mu \Lambda_\mu)_1^2 = \begin{cases} \gamma_1^2 v_1^2 \cos^2 \theta_1, & \text{spacelike discontinuity,} \\ \gamma_1^2, & \text{timelike discontinuity.} \end{cases} \quad (\text{A5})$$

In Ref. 9, only spacelike discontinuities with $\theta_1 = 0$ were considered. From (A4) and (A5) we obtain an expression for the velocity of the oncoming flow in the rest frame of the front (for $\theta_1 = \theta_2 = 0$):

$$v_1^2 = (p_1 - p_2)(e_2 + p_1) / (e_1 - e_2)(e_1 + p_2). \quad (\text{A6})$$

In the case of timelike detonation, the velocity v_1' is

$$v_1'^2 = v_1^{-2}.$$

The relative velocity of the incoming and outgoing flows for both spacelike and timelike fronts is

$$v_{12}^2 = v_{12}'^2 = (p_1 - p_2)(e_1 - e_2) / (e_1 + p_2)(e_2 + p_1). \quad (\text{A7})$$

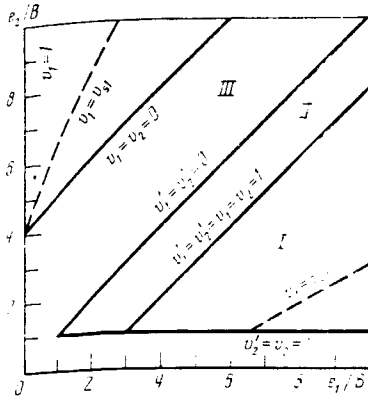


FIG. 4. Kinematic regions in which the continuity equations are satisfied for physical values of the flow velocity for the transition between quark matter with energy density e_2 and hadronic matter with energy density e_1 (B is the constant in the quark bag model). In the figure, I is the region of spacelike detonation, II is the region of timelike detonation, and III is the unphysical region. Because of the possibility of timelike detonation the unphysical region is here smaller than the one obtained in Ref. 9 (Fig. 4).

If we denote the entropy flux by $S^\mu = su^\mu$, then the condition of increase of the entropy can be written as

$$[S^\mu \Lambda_\mu] \geq 0 \quad \text{or} \quad s_2/s_1 \geq (T_2/T_1) (e_2 + p_1)/(e_1 + p_2) \quad (\text{A8})$$

for both cases of detonation in the process 1→2. If in Eqs. (A6)–(A8) we substitute the same equation of state and make the same analysis as in Ref. 9, then we can find the region in which timelike detonation is possible (see Fig. 4).

APPENDIX 2. IMPLOSION INDUCED BY RADIATION

We consider a physical volume filled with matter and fairly transparent for radiation. This matter undergoes an exothermic transition if its temperature exceeds T_c . We assume that the core is surrounded by a shell of explosive that ignites rapidly and whose radiation leads to heating of the core. We ignore the expansion of the shell inward, and also the expansion of the core, i.e., we shall assume that its radius is unchanged, $R = \text{const}$. Suppose the shell is ignited at the time $t_0 = 0$ simultaneously at all points. In what follows, the length is measured in units of R and the time t in units of R/c .

Let Q be the heat that the shell radiates in unit time through unit surface. If it is assumed that in the matter of the core a constant fraction C of this heat is absorbed, then at distance r from the center of the core we have (we ignore the opacity of the core)

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= CQ \int d\tau \cdot 2\pi \\ &\times \int d\cos\theta (1+r^2-2r\cos\theta)^{-1} \delta[\tau - (1+r^2-2r\cos\theta)^{1/2}] \\ &= C \cdot 2\pi Q r^{-1} \int \frac{d\tau}{\tau} = \frac{2\pi C Q}{r} \ln \tau \quad (\text{A9}) \end{aligned}$$

where

$$\alpha = \begin{cases} 1-r, & t \leq 1-r, \\ t, & 1-r < t < 1+r, \\ 1+r, & t > 1+r. \end{cases}$$

Thus, the heat absorbed in unit time is

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi C Q}{r} \begin{cases} \ln[(1+r)/(1-r)], & t > 1+r, \\ \ln \frac{t}{1-r}, & 1-r < t < 1+r, \\ 0, & t < 1-r. \end{cases} \quad (\text{A10})$$

Ignoring the compression, assuming that the specific heat C_V is constant, and using the fact that $dT \approx dQ/C_V$, we obtain

$$\begin{aligned} T(r, t) &\approx \frac{1}{C_V} \int_0^t dt \frac{dQ}{dt} \\ &= \frac{2\pi C Q}{C_V r} \begin{cases} t \ln \frac{1+r}{1-r} - 2r, & t > 1+r, \\ t \left(\ln \frac{t}{1-r} - 1 \right) - 1-r, & 1-r < t < 1+r, \\ 0, & t < 1-r \end{cases} \quad (\text{A11}) \end{aligned}$$

(thus, if $t > 1+r$, then $T(r=0, t) \propto t-1$). The discontinuity surface is determined by the contour $T(r, t) = T_c$. The tangent to this contour at $t > 1+r$ is given by the expression

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_{T_c} &= \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{T_c} / \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{T_c} \\ &= \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right) / t \left(\frac{2}{1-r} - \frac{1}{r} \ln \frac{1+r}{1-r} \right). \quad (\text{A12}) \end{aligned}$$

The point (t_c, r_c) , at which the spacelike and timelike parts of the surface converge, is determined by the condition $(\partial r / \partial t)_{T_c} = 1$, whence

$$t_c = \left\{ \left[(1-r_c) \ln \left(\frac{1+r_c}{1-r_c} \right) \right]^{-1} - \frac{1}{r_c} \right\}^{-1}.$$

For example, for $r_c = 0.5$ we have $t_c = 2.34$ and $T_c = 3.142(2\pi C Q / C_V)$. The center of the core is heated to T_c during the time $t = 2.57$. The line $t = t_c(r)$ separates the spacelike and timelike parts of the discontinuity surface $T(r, t) = T_c$. The discontinuity is formed at $r = R$ at the time $t = 0$ and then propagates inward. This process initially proceeds slowly, but it is then accelerated by the radiative heat transfer and at $r_c = t_c^{-1}(t_c(r))$ goes over smoothly into a timelike discontinuity (see Fig. 3). If $T_c = 4\pi C Q / C_V$, then this occurs approximately at $r_c = 0.5-0.6$. A similar gradual transition from spacelike to timelike detonation can be realized in the late stages of ultrarelativistic nuclear collisions. If we include radiative heat transfer in the scenario described in Ref. 11, then the transition from spacelike to timelike deflagration will be smooth. However, this question requires a more detailed numerical analysis.

¹A. H. Taub, Phys. Rev. **74**, 328 (1948).
²K. S. Thorne, Astrophys. J. **179**, 897 (1973).
³P. J. Stainhardt, Phys. Rev. D **25**, 2074 (1982).

- ⁴M. H. Johnson and C. F. McKee, Phys. Rev. D **3**, 858 (1971).
⁵G. Lasher, Phys. Rev. Lett. **42**, 1646 (1979); A. H. Guth and E. J. Weinberg, Phys. Rev. D **23**, 876 (1981).
⁶E. V. Shuryak, Phys. Rep. **61**, 71 (1980).
⁷C. Z. Van Hove, Z. Phys. C **21**, 93 (1983).
⁸B. L. Friman, G. Baym, and J.-P. Blaizot, Phys. Lett. **132B**, 291 (1983).
⁹M. Gyulassy, K. Kajantie, H. Kurki-Suonio, and L. McLerran, Nucl. Phys. **B237**, 477 (1984).

- ¹⁰L. P. Csernai, Phys. Rev. D **29**, 1945 (1984).
¹¹N. K. Glendenning and T. Matsui, Phys. Lett. **141B**, 419 (1984).
¹²L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mekhanika sploshnykh. Fizmatgiz, Moscow* (1956); translated into English as: *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford (1959) and *Theory of Elasticity*, Pergamon Press, Oxford (1959).

Translated by Julian B. Barbour